Grafų teorija

Parengė Kęstutis Matuliauskas

2010 m. liepos 7 d.

Užrašams

1 leidimas – 2010.01.28

2 leidimas – 2010.07.07

Įvadas

Pratarmė

Parengta pagal E. Manstavičiaus knygą „*Diskrečioji matematika: kombinatorikos ir grafų teorijos pradmenys*“. Taip pat pagal G. Skersio dėstomo kurso „*Grafų teorija*“ paskaitose pateiktą medžiagą. Konspektas skirtas studentams, kurių studijų programoje yra įtraukta teorija apie grafus.

Kai kuriems apibrėžimams, aiškumo dėlei, yra pateiktos kelios ekvivalenčios formuluotės. Pabaigoje pateikti kelių tipinių sunkesnių uždavinių sprendimai.

Prie paskutinės konspekto versijos rengimo aktyviai prisidėjo dėstytojas G. Skersys.

Turinys

Trumpiniai, simboliai, priminimui

Trumpiniai

n-arg. – n-argumentų
žym. - žymime
t.t.t. – tada ir tik tada

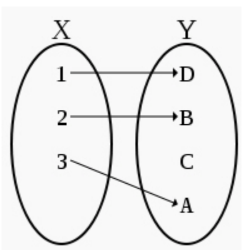
Simboliai

A ⊆ B, B ⊇ A – poaibis($A \leq B$)
A ⊂ B, B ⊃ A – tikrasis poaibis($A < B$)
A ∪ B – sąjunga($A + B$)
A ∩ B – sankirta($A * B$)
A \ B – skirtumas(A-B)
Σ (a,b,c) – suma(a+b+c)
∃ – egzistuoja
∄ – neegzistuoja
∀ – kiekvienam
∈ – priklauso
∉ – nepriklauso
≡ – ekvivalentus

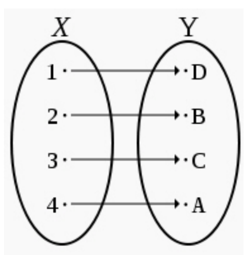
U = {X,Y} – nesutvarkyta pora, t.y. **galima** sukeisti poros elementus vietomis.
G = (V,E) – sutvarkyta pora, t.y. **negalima** sukeisti poros elementus vietomis.

Priminimui

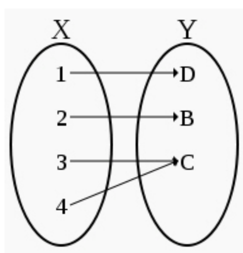
Injekcija, bijekcija, siurjekcija – tai atvaizdis φ iš aibės X į aibę Y – φ: X → Y.



Injekcija



Bijekcija



Siurjekcija

Derinių skaičiaus išraiška $(n, k \in \mathbb{N})$:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Įsidėmėtinos taisyklės:

$0! = 1$	$\binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{1} = n$
$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{k} = 0, \quad kai\ k > n$	

Apibrėžimai

*(**Pastaba:** pariebintu pasvirusiu šriftu pateikti alternatyvūs apibrėžimai-paaiškinimai, be išsireiškimo kitais apibrėžimais)*

Grafas – tai aibių pora (Viršūnės; briaunos). *[Žym. **G = (V,E)**]*
***G** – grafas; **V** – viršūnių aibė; **E** – nesutvarkytų viršūnių porų arba briaunų (lankų) aibė.*
Vaizdavimas grafiškai: Vaizduojant grafą viršūnės žymimos taškais, briaunos – linijomis.

Gretimos*(kaimyninės)* **viršūnės** – viršūnės, sujungtos briauna.

Paprastasis grafas – tai grafas be kartotinių briaunų.

Plokščiasis grafas – tai grafas, kurio briaunos plokštumoje nesikerta.

Kelias – tai briaunų seka iš viršūnės A į viršūnę B.

Paprastasis kelias – tai kelias, kai per ∀ viršūnę einame ne daugiau kaip 1 kartą.

Ciklas – tai paprastasis kelias, sudarytas bent iš 3 viršūnių, kuris prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje.

Tuščiasis grafas – kai ∄ nei viena briauna. *[Žym.* E^n, $m = 0$ *]*

Jungusis grafas – jei ∃ kelias tarp bet kurių dviejų viršūnių.

Pilnasis grafas – jei ∃ briauna, jungianti bet kurias dvi viršūnes. *[Žym.* K^n, $m = C_n^2$ *]*

Grafas su svoriais – grafo briaunos turi priskirtas skaitines reikšmes.

Orientuotas grafas – visos briaunos turi kryptį.

Lankas – orientuota grafo briauna, turinti kryptį.

Digrafas – grafas G = (V,E), kur viršūnių poros ***xy*** yra sutvarkytos.

Pastaba: Digrafo vaizdavime nurodomos briaunų kryptys.

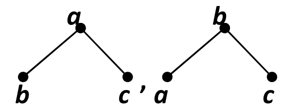
Multigrafas – tai pora (V,E), kur E yra imamas kaip briaunų rinkinys (šeima) su pasikartojimais.

Briaunai incidenčios viršūnės – tai briaunos ***xy*** galai.

Viršūnei incidenčios briaunos – tai briaunos, ateinančios į viršūnę.

Numeruotasis grafas – tai grafas su numeruotomis viršūnėmis.

Izomorfiškų grafų pavyzdys:



Izomorfiškas grafas – tai grafas panašus į kitą grafą, skiriasi tik viršūnių žymėjimas.

Kai G = (V,E) ir G‘ = (V‘,E‘):

Grafai vadinami izomorfiškais – jei ∃ bijekcija $\varphi: V \rightarrow V'$, kur su ∀ briauna ***xy*** tenkinama sąlyga: $xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$.

Digrafai vadinami izomorfiškais – jei ∃ bijekcija $\varphi: V \rightarrow V'$ ir atvaizdis φ išlaiko ir briaunos kryptį.

Multigrafai vadinami izomorfiškais – jei ∃ bijekcija $\varphi: V \rightarrow V'$ ir sąlyga yra tenkinama ∀ iš kartotinių briaunų.

Numeruotieji grafai vadinami izomorfiškais – jei ∃ bijekcija φ: V → V‘ ir atvaizdis φ išlaiko ir viršūnių numeraciją. Kitaip tariant – tai visiškai lygūs grafai.

Baigtinis grafas – tai grafas su baigtinėmis, viršūnių V ir briaunų E, aibėmis.

Kilpa – tai briauna tarp tos pačios viršūnės, t.y. briauna ***xx***.

Aibės galia – tos aibės elementų skaičius. *[Aibės A galia žym. |**A**|]*

V aibės galia *(viršūnių skaičius)* žymimas |V| = n ≥ 1; *[Žym.* ***n*** *]*

E aibės galia *(briaunų skaičius)* žymimas |E| = m ≥ 0; *[Žym.* ***m*** *]*

Grafo eilė – skaičius n *(viršūnių sk.)*.

Grafo didumas – skaičius m *(briaunų sk.)*.

Grafo briaunų susikirtimo taškų skaičius plokštumoje – skaičius Cr. *[Žym.* ***Cr(G)*** *]*

Grafo skaitiniai parametrai – eilė, didumas, minimalus briaunų susikirtimo skaičius.
(jų yra ir daugiau – jungumo komponenčių skaičius, minimalusis ir maksimalusis laipsniai, skersmuo,..)

Grafo poaibis – tai grafas, sudarytas iš kito grafo viršūnių $V' \subset V$ ir briaunų $E' \subset E$ poaibių.

Pografis – tai grafo poaibis. *V‘ ⊂ V, E‘ ⊂ E. [Dažnai žym.* ***G‘*** *]*

Viršūnių aibėje V‘ indukuotasis pografis – tai pografis, kurio viršūnių aibė yra ***V‘***, o briaunų aibėje yra visos pradinio grafo briaunos, jungiančios pografio viršūnes. *[Žym.* ***G[V‘]*** *]*

Jungus pografis – jei ∃ kelias tarp bet kurių pografio viršūnių.

Grafo sutraukimas – tai grafo viršūnių x ir y sutapatinimas, išmetus briauną *xy*.

Viršūnės laipsnis *(valentingumas)* – tai briaunų, ateinančių į viršūnę, skaičius. *[Žym.* ***δ(x)*** *]*

Izoliuotoji viršūnė – tai viršūnė, kurios laipsnis yra 0. *[δ(x) = 0]*

Minimalus grafo laipsnis – tai mažiausias viršūnės laipsnis grafe.

Maksimalus grafo laipsnis – tai didžiausias viršūnės laipsnis grafe.

K-reguliarusis *(k-valentis)* **grafas** – tai grafas su vienodais minimaliu ir maksimaliu laipsniais.
Skaičius k – tas laipsnis. *(Visų grafo viršūnių laipsniai yra lygūs k)*
Savybė: Kubinis ir Petersono grafai yra trivalenčiai.

Grafų sąjunga – tai grafas *(V ∪ V‘, E ∪ E‘)*, sudarytas iš 2 grafų. *[Žym.* ***G∪G‘*** *]*
Pastaba: Dažnai grafų sąjungoje viršūnėms yra keliamas reikalavimas – neturėti bendrų viršūnių.

Grafų suma – tai grafų sąjunga, papildomai išvedant visas briaunas jungiančias V ir V‘ viršūnes.
[Žym. ***G+G‘*** *]*

Kelias – tai briaunų ir viršūnių seka iš viršūnės A į viršūnę B.

Trasa – tai kelias, kurį sudaro tik skirtingos briaunos.

Uždaras kelias – tai kelias, kuri prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje. Jį sudaro bent 3 viršūnės.

Uždara trasa – tai trasa, kuri prasideda ir baigiasi toje pačioje viršūnėje. Ją sudaro bent 2 viršūnės.

Grandinė – tai uždara trasa.

Takas – tai kelias/trasa, kuriame visos vidinės viršūnės skirtingos. *[Žym.* $P=x_1x_2...$ *]*

Ciklas *(grandis)* – tai uždaras takas, sudarytas bent iš 3 viršūnių. *[Žym.* $P=x_1x_2...$ *]*

Ciklas *– tai bent 3 skirtingas viršūnes apimanti briaunų ir viršūnių seką, kuri prasideda ir užsibaigia toje pačioje viršūnėje, bei visos jį sudarančios vidinės viršūnės yra skirtingos. [Žym.* $P=x_1x_2...$ *]*

Dilerio ciklas*(Euler'io ciklas)* – tai grandinė, sudaryta iš visų grafo briaunų.

Dilerio ciklas *– tai seka, iš bent 2-jų grafo viršūnių ir visų skirtingų grafo briaunų, prasidedanti ir užsibaigianti toje pačioje viršūnėje.*

Hamiltono ciklas – tai ciklas, apimtas visas grafo viršūnes.

Dilerio grafas – grafas, kuriame ∃ Dilerio ciklas.

Hamiltono grafas – grafas, kuriame ∃ Hamiltono ciklas.

Grafo jungumo komponentė – tai maksimalus jungus pografis.

Grafo jungumo komponentė *– tai grafo poaibis, kuris apima visas grafo viršūnes, arba prie jo nebegalime prijungti jokios kitos grafo viršūnės, nes jis tampa nejungiu.*

Iškarpos viršūnė – viršūnė, kurios atėmimas keičia grafo jungumo komponenčių skaičius.

Tiltas – briauna, kurios atėmimas keičia grafo jungumo komponenčių skaičių.

Atstumas d – tai trumpiausio tako ilgis tarp viršūnių x ir y, jeigu toks takas ∃. Kitu atveju atstumas laikomas begaliniu. *[Žym.* ***d(x,y)*** *]*

Dvidalis *(dvispalvis, bichromatinis)* **grafas** – tai grafas, kurį sudaro 2 pografiai ir ∀ grafo briauna jungia pirmojo ir antrojo pografių viršūnes. $V' \cup V'' = V$, $V' \cap V'' = \emptyset$.

Savybė: Dvidalis grafas neturi nelyginio ilgio grandinių.

Pilnasis dvidalis grafas – tai dvidalis grafas, kurio visos aibės $\boldsymbol{V'}$ viršūnės sujungtos su visomis aibės $\boldsymbol{V''}$ viršūnėmis. *[Žym.* $\boldsymbol{K_{k,l}}$ *]*

Beciklis grafas – grafas, neturintis ciklų.

Miškas – tai beciklis grafas.

Jungusis miškas – tai beciklis grafas, kuriame ∃ kelias tarp bet kurių jo viršūnių.

Medis – tai jungusis miškas.

Medžio skaitiniai parametrai – eilė ir didumas. *(Taip pat yra ir kitų parametrų)*

Jungiantysis medis – tai medis, kurio viršūnių aibė sutampa su visa grafo viršūnių aibe, o briaunų aibė yra grafo briaunų aibės poaibis.

Karkasinis medis *(karkasas)* – tai minimalus jungiantysis medis.

Karkasas – tai beciklis grafas, kuriame ∃ kelias tarp bet kurių jo viršūnių, o viršūnių aibė sutampa su visa grafo viršūnių aibe, o briaunų aibė yra grafo briaunų aibės poaibis.

Ekonomiškas medis – tai toks karkasinis medis, kurio briaunos turi skaitines reikšmes, kad bendra skaitinių reikšmių suma būtų mažiausia.

Ekonomiškas medis *– tai toks beciklis grafas, kuriame ∃ kelias tarp bet kurių jo viršūnių, kurio viršūnių aibė sutampa su visa grafo viršūnių aibe, briaunų aibė yra grafo briaunų aibės poaibis, o grafo briaunos turi skaitines reikšmes, kad bendra tų skaitinių reikšmių suma būtų mažiausia.*

***(Medžio)* vienatis** *(vienatinumas)* – tai vienintelis galimas *(medžio)* atvejis duotomis sąlygomis.

Ekonomiško medžio vienatis – taip apibūdinamas faktas, kad ∃ vienintelis ekonomiškas medis*(kai medžio kainos funkcija yra injektyvi).*

Žordano kreivės – tolydžios plokštumos kreivės, kurių ∀ neliečia ir nekerta savęs pačios, išskyrus galinius taškus.

Planarusis grafas – tai grafas, kurį galima Žordano kreivėmis pavaizduoti plokštumoje.

Planarusis grafas *– tai grafas, turintis izomorfišką vaizdą (skiriasi tik viršūnių žymėjimas) plokštumoje su Žordano kreivėmis vaizduojamomis briaunomis.*

Plokščiasis grafas – tai plokštumoje išvestas planarusis grafas.

Grafo veidas – tai plokštumos sritis, apribota plokščio grafo briaunomis.

Savybė: Visi plokštieji grafai turi begalinį veidą.

Žemėlapis – tai plokščiasis grafas (be tiltų), kartu su savo veidais.

Valstybės – tai grafo veidai žemėlapyje.

Grafo talijos apimtis – tai mažiausias grafo ciklo ilgis *($3 \le g < \infty$). [Žym.* ***g*** *]*

Chromatusis grafo skaičius – tai minimalus skirtingų spalvų skaičius, reikalingas norint nudažyti grafo viršūnes taip, kad ∀ dvi gretimos viršūnės būtų skirtingų spalvų. *[Žym.* ***χ(G)*** *]*

Junginys – tai grafo ir jo pografio pora. *[Žym.* ***(G,G')*** *]*

Šaknis – tai numeruoto medžio viena išskirta viršūnė.

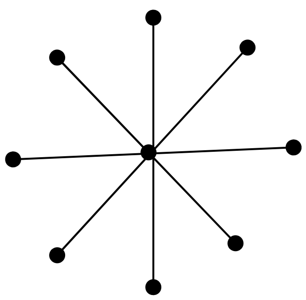
Šakninis medis – tai numeruotas medis su viena išskirta viršūne.

Cayley'io medis – tai šakninis medis.

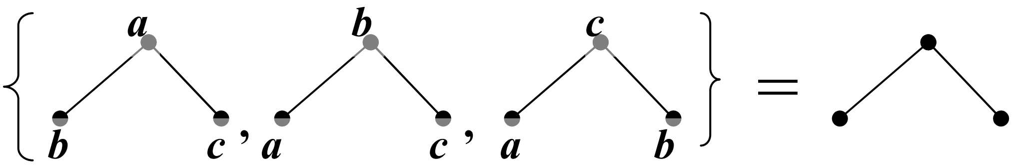
Šakninis miškas – tai baigtinis šakninių medžių rinkinys.

Miško šaknis – tai šakninį mišką sudarančių medžių šaknų rinkinys.

Žvaigždinis grafas – jungaus grafo $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ atvejis – medis $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}')$, kai atstumas d visada 1. $T(n, n-1) = 1$.



Abstraktus grafas – grafas, kuriame nesužymėtos viršūnės. Reiškiantis sužymėtų grafų aibę.



Dvejetainis *(binarinis)* **medis –** medis, kuris turi vieną 2-ojo laipsnio viršūnę *(šaknį)*, o kitų viršūnių laipsniai yra 3 *(vidinės viršūnės)* arba 1 *(medžio lapai)*.

Prüferio kodas – tai seka $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-2})$, vienareikšmiškai priskirta medžiui $\boldsymbol{G}$, kurio viršūnių seka sunumeruota $V = \{x_1, \dots, x_n\}$

Teoremos, lemos, išvados

Bendros teoremos

1 teorema. Galima sudaryti $2^{n(n-1)/2}$ skirtingų n-tosios eilės numeruotųjų grafų.

2 teorema. Grafas yra jungių pografių sąjunga.

3 teorema. Grafas yra miškas t.t.t., kai ∀ viršūnių porą jungia ne daugiau kaip vienas takas.

Miškas ir medžiai

4 teorema. Šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:

1. G yra medis;
2. G yra minimalus jungus grafas, *t.y. bet kurios briaunos atėmimas iš grafo padidintų jungumo komponenčių skaičių;*
3. G yra maksimalus beciklis grafas, *t.y. sujungiant bet kokias negretimos viršūnes būtų sukuriamas ciklas.*

Optimizavimo problema

5 teorema. Konspektuose patekti 3 ekonomiško medžio paieškos algoritmai duoda ekonomiškus medžius. Jei kainos funkcija yra injektyvi, tai ekonomiškasis medis yra vienintelis.

Ekonomiško medžio vienatis. Jei kainos funkcija yra injektyvi, tai toks medis yra vienintelis.

Grafo parametrų ryšiai

Eulerio lema. Grafo viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius.

1 išvada. Nelyginio laipsnio viršūnių kiekis grafe yra lyginis skaičius.

2 išvada. Tarkime, kad $d(G) = \frac{1}{|V|}\sum_{x \in V} \delta(x)$ yra vidutinis grafo laipsnis, ir $\varepsilon = \frac{|E|}{|V|}$ – vidutinis briaunų skaičius, tenkantis vienai viršūnei. Tada $\varepsilon(G) = d(G)/2$.

2 lema. Jei $G' = (V', E')$ ir $G'' = (V'', E'')$, $V' \cap V'' = \emptyset$, – du pilnieji grafai su aibių galiomis:

$$|V'| = n_1, \quad |V''| = n_2, \quad n_1 + n_2 = n .$$

Tai grafo $\boldsymbol{G' \cup G''}$ didumas didžiausias, kai $n_1 = n - 1$, o $n_2 = 1$.

6 teorema. Jei **n** – grafo eilė, **m** – didumas, o **k** – jo jungumo komponenčių kiekis, tai:

$$n - k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

1 išvada. Maksimalus nejungaus grafo briaunų skaičius lygus: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

2 išvada. Jei n-tosios eilės grafas turi daugiau nei $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ briaunų, tai jis yra jungus.

7 teorema. n-tosios eilės grafas yra medis t.t.t., kai jo didumas lygus **n-1**.

1 išvada. n-tos eilės grafo jungiančiojo medžio didumas yra **n-1**.

2 išvada. n-tos eilės miško iš k medžių didumas lygus **n-k**.

Grafo planarumas

Dilerio teorema*(1752)*. Jei **G** – jungus žemėlapis, **n** – jo eilė, **m** – didumas, **f** – valstybių skaičius, tai:

$$n - m + f = 2$$

9 teorema. Planarusis $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$ eilės jungus grafas turi

$$m \leq 3n - 6$$

briaunų. Jei toks grafas turi mažiausio ilgio $3 \leq g < \infty$ ciklą, tai:

$$m \leq \frac{g(n-2)}{g-2}$$

Išvada. Pilnas grafas $\mathbf{K^5}$ ir dvidalis grafas $\mathbf{K_{3,3}}$ yra neplanarieji.

Pastaba. Jungaus plokščio grafo minimalus laipsnis neviršija 5.

10 teorema. Tegu $\boldsymbol{Cr(G)}$ yra **n** ≥ **3**-os eilės grafo **G** briaunų susikirtimo taškų skaičius, vaizduojant jį plokštumoje. Tada:

$$Cr(G) \geq m - 3n + 6$$

Pastaba. 1982 metais buvo pastebėta, kad:

$$Cr(G) \geq c * m^3/n^2 \quad , \quad kur\ c > 0, \qquad kai\ m \geq 4n$$

Grafo viršūnių spalvinimo problema

11 teorema. Jei $\boldsymbol{\Delta(G)}$ yra maksimalus grafo laipsnis, tai $\boldsymbol{\chi(G) \leq \Delta(G) + 1}$.

3 lema. ∀ planarusis grafas turi ne didesnio kaip penktojo laipsnio viršūnę.

12 teorema. ∀ planarusis grafas yra 5-spalvis.
Išvada. ∀ žemėlapis yra 5-spalvis.

13 teorema. ∀ žemėlapis yra 4-spalvis.

Medžių skaičius

Cayley'io teorema. Iš viso galime sudaryti $\boldsymbol{n^{n-2}}$ skirtingų *(izomorfiškų arba ne)* numeruotų n eilės medžių.

Išvada. Yra $\boldsymbol{d_n := n^{n-1}}$ šakninių n eilės medžių.

15 teorema. Jei $\boldsymbol{q_n}$ – n-tosios eilės šakninių miškų skaičius, tai:

$$q_n = \frac{d_{n+1}}{n+1} = (n+1)^{n-1}$$

16 teorema. Teisingas rekurentinis sąryšis *($C_1 = 1$)* :

(Dvetainių medžių, turinčių N lapų, kiekio formulė)

$$C_N = \sum_{k=1}^{N-1} (C_N C_{N-k})$$

Be to:

$$C_N = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1}$$

Pastaba. Vidutinis tako nuo šaknies iki lapo ilgis išreiškia algoritmo, pavaizduoto dvejetainiu medžiu, efektyvumą.

Karkasinio medžio išvedimo būdai

1 būdas. Jungiame *(vadinasi, ∃ kelias tarp ∀ viršūnių poros)* grafe $\boldsymbol{G = (V,E)}$:

1. Fiksuokime viršūnę $\boldsymbol{x \in V}$.
2. Apibrėžkime skaičių s:

$$s = |V \setminus \{x\}| = n - 1 \quad , \qquad s < \infty$$

*(čia **s** –maksimalus įmanomas tako ilgis, iš viršūnės **x** į labiausiai nutolusią grafo G viršūnę)*

3. Viršūnių aibę V suskaidykime į nepersikertančius poaibius $\boldsymbol{V_0, V_1, \ldots, V_S}$:

$$\boldsymbol{V_i} = \{y \in V : d(x,y) = i\} \quad , \text{ kur } \quad i = 0,1, .., s; \quad V' = \{v_1, \ldots, v_z\}$$

*(čia **d** – trumpiausio tako ilgis tarp viršūnių x ir y, kuris jungiaus grafo atveju visada ∃)*

T.y.:

$$\boldsymbol{V_0} = \{y \in V : d(x,y) = 0\} \quad , \quad i = 0, \rightarrow V_0 = \{x\}, \quad V' = \{\cancel{x}, v_1, \ldots, v_z\}$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{V_i} = \{y \in V : d(x,y) = i\} \quad , \quad i = 1, .., s-1$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{V_S} = \{y \in V : d(x,y) = s\} \quad , \quad i = s$$

4. Jei $\boldsymbol{y_i \in V_i}$, tai ∃ $\boldsymbol{x \rightarrow y_i}$ takas $\boldsymbol{P = xz_1 \ldots z_{i-1} y_i}$.
5. Pastebėkime, kad $\boldsymbol{V_j} \neq \emptyset$, $kur\ j = 0,1, \ldots, i$, $kai\ i > 0$.
6. Taigi, ∀ $\boldsymbol{y_i \in V_i}$ rasime $\boldsymbol{y'_{i-1}} \in V_{i-1}$ tokį, kad $\boldsymbol{y'_{i-1} y_i} \in E$.
7. Iš, galbūt, kelių galimybių pasirinkime vieną.
8. Kai $\boldsymbol{y}$ perbėgs $\boldsymbol{V}$, o $\boldsymbol{y'}$ bus viršūnei $\boldsymbol{y}$ priskirtos, pradinei $\boldsymbol{x}$ artimesnės viršūnės, briaunos $\boldsymbol{yy'}$ ir sudarys briaunų aibę $\boldsymbol{E'}$:

$$T = (V, E'), \qquad E' = \{\, yy' : y \in V, y \neq x \,\}$$

9. Kadangi į ∀ $\boldsymbol{y}$ iš $\boldsymbol{x}$ patenkama tik vienu keliu, grafas $\boldsymbol{T}$ neturi ciklų. Taigi, $\boldsymbol{T}$ - karkasinis medis.

Indukcinis būdas.

1. Tegu $\boldsymbol{V}$ – visų grafo $\boldsymbol{G = (V, E)}$ viršūnių aibė, o $\boldsymbol{Z}$ – jau panaudotų grafo $\boldsymbol{G}$ viršūnių aibė. Pradžioje $\boldsymbol{Z} = \{\emptyset\}$**.** Tuomet, jei $\boldsymbol{T_i} := (\boldsymbol{V_i}, \boldsymbol{E_i})$ ir $\boldsymbol{i} > 1$, tai $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V_{i-1}}$.
2. Imkime $\boldsymbol{x \in V}$. Tada $\boldsymbol{T_1} := (\{\boldsymbol{x}\}, \emptyset)$ - medis. Fiksuojame naują $\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{x}\}$.
3. Išsirenkame viršūnę $\boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{Z})$ tokią, kad ją jungtų briauna su viršūne $\boldsymbol{z \in Z}$**.** Fiksuojame naują $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z} \cup \{\boldsymbol{y}\}$.

   Pvz.: jei k=2, tai medis $\boldsymbol{T_2} := (\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}, \{\boldsymbol{xy}\})$ *, o* $\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.

   Kitaip tariant:

   1) Tarkime, kad jau sukonstravome medžių seką:

   $$T_1 \subset T_2 \subset \ldots T_i \subset \ldots \subset T_k \subset G$$

   *(čia $\boldsymbol{T_i}$ – i-tosios eilės medis, **i** – medžio eilė)*

   2) Jei $\boldsymbol{k < n} = |V|$, tai ∃ pora ***(y,z)*** tokia, kad:

   $$z \in V(T_k)\,, y \in V \setminus V(T_k)$$

   (čia $\boldsymbol{V(T_k)}$ - T_k viršūnių aibė, ir $\boldsymbol{zy \in E}$)

   Priešingas atvejis prieštarautų grafo *G* jungumui.

   3) Apibrėžkime $\boldsymbol{T_{k+1}}$:

   $$T_{k+1} = (V(T_k) \cup \{y\}, E(T_k) \cup \{zy\})$$

4. Kartojame 3-iąjį žingsnį iki tol, kol $\boldsymbol{Z}$ tampa lygus $\boldsymbol{V}$, o $\boldsymbol{V}$ tampa lygus $\{\emptyset\}$.
5. Baigtiniame grafe šis procesas baigtinis. Jis baigiasi, kai $\boldsymbol{k = n}$.

Ekonomiško medžio paieškos algoritmai

1. Turime pilnąjį n-tos eilės grafą **G=(V,E)** ir apibrėžtą kainos funkciją:

$$f: E \to \mathbb{R}^+$$

Reikia išvesti karkasinį medį $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E'})$, tokį, kad bendra medžio T kaina $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$:

$$F(T) = \sum_{xy \in E'} f(xy), \qquad \check{c}ia\ f(xy) - \ kainos\ funkcija$$

būtų mažiausia.

2. Prisiminkime 4-ąją teoremą:

4 teorema. Šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:

1. G yra medis;
2. G yra minimalus jungus grafas, *t.y. bet kurios briaunos atėmimas iš grafo padidintų jungumo komponenčių skaičių;*
3. G yra maksimalus beciklis grafas, *t.y. sujungiant bet kokias negretimas viršūnes būtų sukuriamas ciklas.*

3. Norėdami surasti ekonomišką medį, taikykime vieną iš 3 jo paieškos algoritmų:

1 algoritmas *(paieška pagal mažiausią kainą)***:**

1. Imame briauną $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{xy} \in \boldsymbol{E}$ su mažiausia kaina:
$$f(e) = \min_{xy \in E} f(xy) \ ;$$
2. Iš likusių briaunų išrenkame pigiausią;
3. Procesą kartojame su sąlyga, kad išrenkamos briaunos nesudarytų ciklo.

Procesas baigtinis, o gautasis grafas, kaip maksimalus beciklis grafas, pagal 4 teoremos 3 punktą, bus karkasinis medis.

2 algoritmas (*paieška pagal didžiausią kainą)***:**

1. Imame briauną $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{xy} \in \boldsymbol{E}$ su didžiausia kaina:
$$f(e) = \max_{xy \in E} f(xy) \ ;$$
ir ją atimame iš grafo $\boldsymbol{G}$;
2. Tą patį kartojame su grafu $\boldsymbol{G} \setminus \{\boldsymbol{e}\}$, *t.y.* $G - e$;
3. Procesą baigiame, kai kitas bet kurios briaunos atėmimas padidintų grafo jungumo komponenčių skaičių.

Gautasis grafas, kaip minimalus jungus grafas, pagal 4 teoremos 2 punktą, bus jungiantysis medis.

3 algoritmas *(indukciniu būdu)***:**

1. Imame bet kokią viršūnę $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{V}$;
2. Imame vieną iš pigiausių briaunų, incidenčių viršūnei x_1, briauną $\boldsymbol{x_1 x_2} \in \boldsymbol{E}$ $(x_2 \in V \setminus \{x_1\})$;
3. Radę viršūnes $x_1, \ldots, x_k$ ir briaunas $\boldsymbol{x_i x_j}$ $(i < j \leq k)$, ieškome $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_{k+1}} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_k}\}$, tokios, kad kaina $\boldsymbol{f(x_{k+1} x_i)}$, su kažkokiu $\boldsymbol{i \leq k}$, būtų minimali.

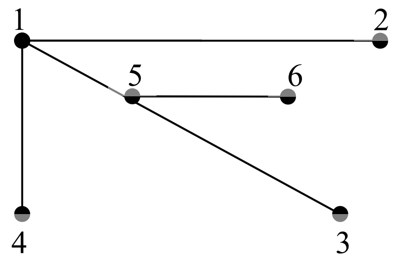
Procesas baigiasi, kai $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}$, o briaunų skaičius lygus $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1}$. Taip gavome jungiantįjį medį.

Prüferio kodo paieškos algoritmai

Prüferio kodo sudarymo, pagal duotą medį, algoritmas:

Visų pirma grafas turi būti numeruotas.

1. Iš visų grafo viršūnių išsirenkame tą, kurios laipsnis yra ***1***.
2. Jei yra kelios tokios viršūnės, tai imame tą, kurios numeris mažiausias.
3. Tuomet pasirenkame viršūnę **y** , Į KURIĄ vedą mūsų 1-2 punktuose pasirinkta viršūnė ***x***.
4. Viršūnę, kurios numeris **y**, dedame į Prüferio kodą.
5. Viršūnę, kurios numeris yra x, šaliname iš grafo, kartu su jai incidenčia briauna ***xy***.
6. Procesą kartojame, kol Prüferio kodas pasiekia ***n-2*** ilgį. Čia ***n*** – pradinio grafo viršūnių skaičius.
7. Rezultate gavome Prüferio kodą pagal duotą medį.

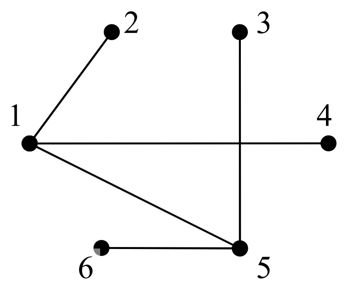


$$\alpha = \{1,5,1,5\}$$

Medžio radimo, pagal duotą Prüferio kodą, algoritmas:

1. Atidedame *(pažymime)* **n** viršūnių, kur **n-2** yra Prüferio kodo ilgis.
2. Imame mažiausio numerio viršūnę, kurios nėra Prüferio kode.
3. Ją jungiame *(nubraižome grafe)* su pirma viršūne iš Prüferio kodo.
4. Abi šias viršūnes pašaliname, atitinkamai, iš mūsų viršūnių aibės, bei Prüferio kodo.
5. Procesą kartojame tol, kol Prüferio kodo elementų aibė lieka tuščia.
6. Tada sujungiame *(nubraižome grafe)* likusias dvi viršūnes viršūnių aibėje.
7. *Pašaliname šias dvi viršūnes iš mūsų viršūnių aibės. (nebūtina)*
8. Rezultate gavome *(nubraižėme)* medį, pagal Prüferio kodą.

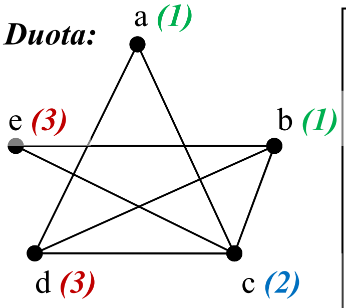
$$\alpha = \{1,5,1,5\}$$



Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Uždavinys 1. Rasti duoto grafo chromatųjį skaičių.

Duota:



Sprendimas:

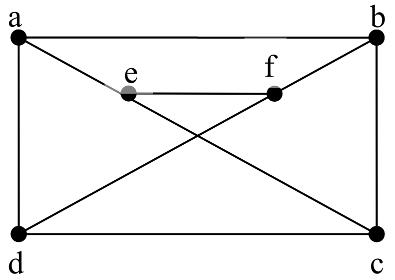
1. Randame maks. grafo laipsnį: $\boldsymbol{\Delta(G) = 4}$;
2. Randame chromatųjį skaičių: $\boldsymbol{\chi(G)} \leq \Delta(G) + 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$;
3. Patikriname ar tikrai $\chi(G) \leq 5$:
   Jei grafe ∃ ciklas iš 3 viršūnių – reikės ne mažiau 3 spalvų. Jeigu ∀ ciklas yra iš 3 viršūnių – reikės lygiai 3 spalvų.
4. Grafe visi ciklai iš 3 viršūnių => $\chi(G) = 3$

Atsakymas: Duoto grafo chromatusis skaičius yra 3.

Dėstytojo komentaras:

Remtis maksimaliuoju grafo laipsniu nepatartina, nes tai nėra labai tikslus chromačiojo skaičiaus įvertis. Jokiu algoritmu remtis negalime, tikslesnį įvertį gautume pabandę nuspalvinti grafo viršūnes. Norėdami įrodyti, kad $\boldsymbol{\chi(G) = k}$ *, turime įrodyti, kad* $\boldsymbol{\chi(G) \leq k}$ *ir* $\boldsymbol{\chi(G) \geq k}$ *. Tačiau nežinome kam lygus skaičius **k**. Įvertį* $\boldsymbol{\chi(G) \leq k}$ *gausime nuspalvinę grafo viršūnes, naudodami kuo mažiau spalvų. Tarkim mums užteko 3 spalvų, t.y.* $\chi(G) \leq 3$ *(tačiau, galbūt, užtektų ir mažiau spalvų kitaip perspalvinus). Kad* $\chi(G) \geq 3$ *matome iš to, kad grafe ∃ ciklas iš 3 viršūnių, pvz. **acda** (taigi 3 spalvų šiam grafui nuspalvinti tikrai reikės, o gal ir daugiau). Todėl* $\boldsymbol{\chi(G) = 3}$

Uždavinys 2. Ar duotas grafas yra dvidalis. Ar duotas grafas yra planarus?



Teorija:

Grafas yra dvidalis, jeigu galime sudaryti du tarpusavyje nesikertančius grafo viršūnių poaibius, kad bet kokia grafo briauna jungtų pirmojo ir antrojo pografių viršūnes.

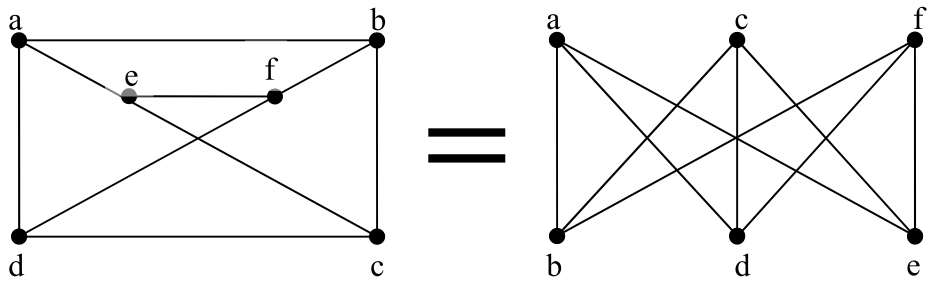
Be to dvidalis grafas neturi NELYGINIO ilgio grandinių.

Sprendimas:

1. Mūsų grafas: $\boldsymbol{G} = (V, E)$; $\boldsymbol{V} = \{a, b, c, d, e, f\}$
2. Išsirenkame viršūnę – pvz. viršūnę a ir ją įrašome į pirmąjį poaibį: $\boldsymbol{V}' = \{a\}$
3. Visas gretimas viršūnes viršūnei a, surašome į antrąjį poaibį: $\boldsymbol{V}'' = \{b, d, e\}$
4. Paskirstome, kitas viršūnes į poaibius taip, kai joms gretimos viršūnės priklausytų kitam poaibiui.
5. Gavome du viršūnių poaibius:

$$\boldsymbol{V}' = \{a, c, f\}$$
$$\boldsymbol{V}'' = \{b, d, e\}$$

6. Patikriname ar tikrai kiekvienai viršūnei gretimos viršūnės yra iš kito poaibio.
7. Kadangi prieštaravimų neradome – vadinasi mūsų grafas yra dvidalis.
8. Kad aiškiau matytųsi, jog duotas grafas – dvidalis, perbraižome jį taip: aibės $\boldsymbol{V}'$ viršūnes žymime viršuje, o aibės $\boldsymbol{V}''$ – apačioje. *(Iš brėžinio dešinėje)* matome, kad tai pilnasis dvidalis grafas $\boldsymbol{K}_{3,3}$. Jis lygus pradiniam grafui G *(brėžinys kairėje)*.



9. Nors duotasis grafas tenkina 1-ąją 9-osios teoremos sąlygą, jis netenkina 2-osios sąlygos:

   ***Žinome** (kai $n \geq 3$):*

   n=6; m=9; g = 4;

   <u>1 sąlyga.</u> $m \leq 3n - 6$ => $9 \leq 3 * 6 - 6$ => $9 \leq 12$ => **Sąlyga tenkinama**

   <u>2 sąlyga.</u> $m \leq \frac{g(n-2)}{g-2}$ => $9 \leq \frac{4(6-2)}{4-2}$ => $9 \leq 8$ => **Sąlyga netenkinama**

   Išvada:

   Todėl <u>duotasis grafas nėra planarus</u>*(vaizduojant Žordano kreivėmis jis neturi izomorfiško vaizdo plokštumoje)*, remiantis:

   a) 9-osios teoremos sąlygomis

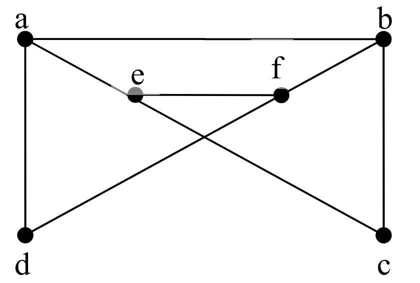
   arba

   b) remiantis 9-osios teoremos išvada – „<..> *dvidalis grafas $\boldsymbol{K}_{3,3}$ nėra planarus*."

<u>Atsakymas:</u> Duotasis grafas yra dvidalis, bet nėra planarus.

Uždavinys 3-1. Ar duotasis grafas planarus? Jei taip – pavaizduoti plokščiąjį grafą.

Duota:



Sprendimas:

1. Duotasis grafas tenkina abi 9-osios teoremos sąlygas *(kai n ≥ 3)*:

   Žinome:

   $n = 6;$ $m = 8;$ $g = 4;$

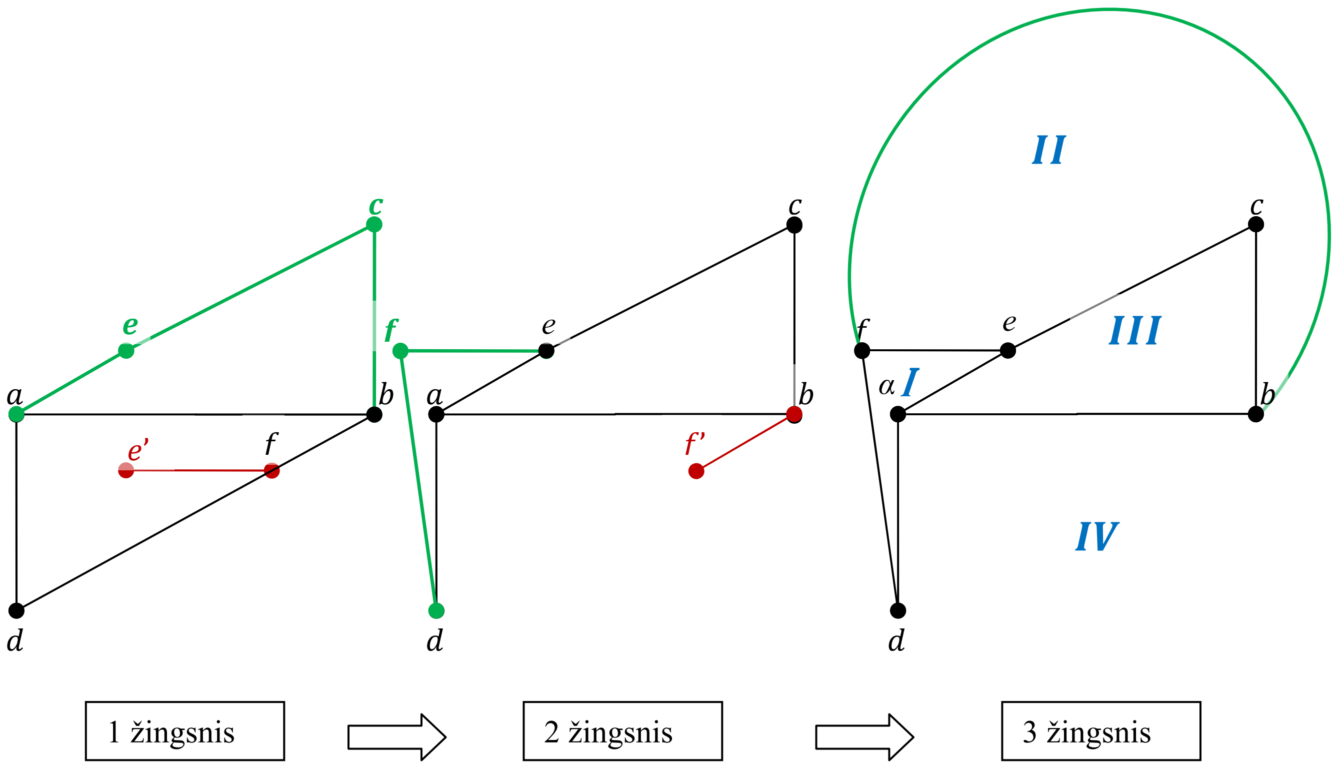
   1 sąlyga. $m \le 3n - 6$ => 8 ≤ 3*6-6 => 9 ≤ 12 => **Sąlyga tenkinama**

   2 sąlyga. $m \le \frac{g(n-2)}{g-2}$ => 8 ≤ 4(6-2)/4-2 => 8 ≤ 8 => **Sąlyga tenkinama**

   Išvada:

   Kadangi abi sąlygos patenkintos, tai apie grafo planarumą nieko negalime pasakyti *(jis gali būti planarus, bet gali ir nebūti)*.

2. Bandome nubrėžti grafą plokštumoje*(plokščiąjį grafą)*. Jeigu to padaryti nepavyktų, greičiausiai mes tiesiog nežinome kaip tiksliai jį nupiešti:



3. Plokščiąjį grafą nubrėžti pavyko.

Atsakymas: Duotas grafas yra planarusis. Plokščiasis grafas pavaizduotas.

Uždavinys 3-2. Suskaičiuoti plokščiojo grafo valstybių skaičių, kai m=8 ir n=6.

Sprendimas:

1. Kadangi šį grafą įmanoma pavaizduoti plokštumoje(duota – grafas yra plokščiasis), galime suskaičiuoti ir šio grafo valstybių skaičių f:

   Žinome:

   $n = 6;$ $\quad\quad m = 8;$

   $n - m + f = 2;$ $\quad$ => $\quad$ $f = m + 2 - n;$

   Skaičiuojame:

   $f = 8 + 2 - 6;$ $\quad$ => $\quad$ $f = 4$

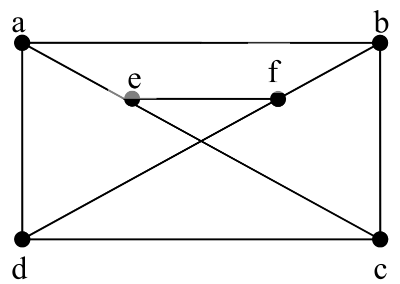
   Išvada:

   Jei planarusis grafas ∃, tai plokščiasis grafas bus sudarytas iš 4 valstybių.
   Valstybes 4-1. užd. plokščiajame grafe pažymėsime numeriais, atitinkamai: ***I***, ***II***, ***III*** ir ***IV***.

Atsakymas: Šio plokščio grafo valstybių skaičius yra lygus 4.

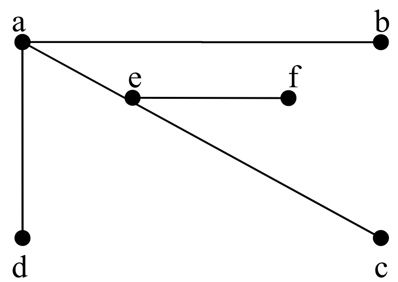
Uždavinys 4. Rasti duoto jungaus grafo karkasinį medį .

1. Pasirenkame viršūnę $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Pavyzdžiui imkime $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.
2. Sudarome jungaus grafo viršūnių poaibius pagal minimalius atstumus nuo viršūnės $\boldsymbol{x}$:



$\boldsymbol{V_0} = \{y \in V : d(x,y) = 0\}$	$\Rightarrow \mathbf{V_0}=\{a\}$	$V'=\{\cancel{a}, b, c, d, e, f\}$
$\boldsymbol{V_1} = \{y \in V : d(x,y) = 1\}$	$\Rightarrow \mathbf{V_0}=\{b, d, e\}$	$V'=\{\cancel{b}, c, \cancel{d}, \cancel{e}, f\}$
$\boldsymbol{V_2} = \{y \in V : d(x,y) = 2\}$	$\Rightarrow \mathbf{V_0}=\{c, f\}$	$V'=\{\cancel{c}, \cancel{f}\}$
$\boldsymbol{V_3} = \{y \in V : d(x,y) = 3\}$	$\Rightarrow \mathbf{V_0}=\varnothing$	$V'=\varnothing$
$\boldsymbol{V_4} = \{y \in V : d(x,y) = 4\}$	$\Rightarrow \mathbf{V_0}=\varnothing$	$V'=\varnothing$
$\boldsymbol{V_5} = \{y \in V : d(x,y) = 5\}$	$\Rightarrow \mathbf{V_0}=\varnothing$	$V'=\varnothing$

3. Pagal sudarytus viršūnių poaibius sudarome karkasinį medį:



Atsakymas: Gavome karkasinį medį – *G=({a, b, c, d, e, f}, {ab, ad, ae, ce, ef}) .*

<u>Uždavinys 5.</u> <u>Rasti ekonomiškąjį medį. Pasakyti jo kainą.</u>

Duota:

G yra pilnas 6 eilės grafas, jo viršūnių aibė *V={a,b,c,d,e,f}* , o <u>kainos funkcija</u> ***f(x)*** yra tokia:

x	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	*af*	*bc*	*bd*	*be*	*bf*	*cd*	*ce*	*cf*	*de*	*df*	*ef*
f(x)	10	1	1	2	3	∞	6	6	7	2	1	∞	1	3	10

Sprendimas*(taikant 1-ąjį, <u>paieškos pagal mažiausią kainą</u>, ekon. medžio sprendimo <u>algoritmą</u>)***:**

1. ***Ieškome:*** $G' = (V, E')$.
2. Susidarome briaunų aibių pagal kainas $f(x) = 1, \dots, s$ sistemą $(PG)_{f(x)}$:

$$(PG)_{f(x)} = \begin{cases} f(x) = 1\ , & (PG)_1 = \{ac, ad, ce, de\} \\ f(x) = 2\ , & (PG)_2 = \{ae, cd\} \\ f(x) = 3\ , & (PG)_3 = \{af, df\} \\ f(x) = 6\ , & (PG)_6 = \{bd, be\} \\ f(x) = 7\ , & (PG)_7 = \{bf\} \\ f(x) = 10, & (PG)_{10} = \{ab\} \\ f(x) = \infty, & (PG)_\infty = \{bc, cf\} \end{cases}$$

3. ***Turime***:

   $G = (V, E)$

   V = (a,b,c,d,e,f)

   E = (ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef)

   $E'' = E\ /\ E'$, čia $E,\ E'$ ir E'' – briaunų aibės

4. ***Imame:*** bet kurią briauną $e_1 = xy \in E$ su mažiausia kaina:

$$f(e_1) = \min_{xy \in E} f(xy)\ ;$$

   (PG)*$_1$*={***ac***, ***ad***, ***ce***, ***de***} . *Pvz.* $\boldsymbol{xy = ac}$.

5. ***Gavome:***

   $\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{ac}$ ir $f(e_1) = 1$;

   $\boldsymbol{E'} = (\boldsymbol{ac})$

   $\boldsymbol{E''}$ = *(ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef).*

   (PG)*$_1$*={*ac, ad, ce, de*} .

   $\boldsymbol{V'} = (a, c)$

6. Iš likusių briaunų išrenkame pigiausią. Procesą kartojame, jei pasirinkta briauna nesudarys ciklo.
7. ***Turime ir imame:***

   (PG)*$_1$*={*ac,* ***ad***, ***ce***, ***de***}

   Gavome:

   $\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{ad}$, $\boldsymbol{f(e_2)} = 1$, $\boldsymbol{E'} = (ac, \boldsymbol{ad})$, $\boldsymbol{V'} = (a, c, d)$, $\boldsymbol{V''} = (a, b, c, d, e, f)$

8. ***Turime ir imame:***

   (PG)*$_1$*={*ac, ad,* ***ce***, ***de***}

   Gavome:

   $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{ce}$, $\boldsymbol{f(e_3)} = 1$, $\boldsymbol{E'} = (ac, ad, \boldsymbol{ce})$, $\boldsymbol{V'} = (a, c, d, e)$, $\boldsymbol{V''} = (a, b, c, d, e, f)$

9. ***Turime ir imame:***
   (PG)₁={*ac, ad, ce, de*}

   Gavome:
   Imti briaunos ***de*** negalime, nes gautume ciklą ***decad***. ***(PG)₁***={*ac, ad, ce, de*}.
   Kadangi ***(PG)₁***={∅}, tai imame $f(x) = 2$, t.y. pereiname prie aibės ***(PG)₂*** elementų.

10. ***Turime ir imame:***
    (PG)₂={***ae***, ***cd***}

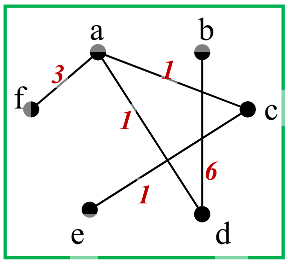
    Gavome:
    Imti briaunų ***ae*** ir ***cd*** negalime, nes gautume ciklus ***aeca*** *arba* ***cdac***. ***(PG)₂***={*ae, cd*}.
    Kadangi ***(PG)₁***=***(PG)₂***={∅}, tai imame $f(x) = 3$, t.y. perein. prie aibės ***(PG)₃*** elementų.

11. ***Turime ir imame:***
    (PG)₃={***af***, ***df***}

    Gavome:
    $\boldsymbol{e_4} = \boldsymbol{af}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_4}) = 3$, $\boldsymbol{E'} = (ac, ad, ce, \boldsymbol{af})$, $\boldsymbol{V'} = (a, c, d, e, f)$, $\boldsymbol{V''} = (a, b, c, d, e, f)$

12. ***Turime ir imame:***
    (PG)₃={*af*, ***df***}

    Gavome:
    Imti briaunos ***df*** negalime, nes gautume ciklą ***dfad***. ***(PG)₃***={*af, df*}.
    Kadangi ***(PG)₁***=***(PG)₂***=***(PG)₃***={∅}, tai imame $f(x) = 6$,
    t.y. pereiname prie aibės ***(PG)₆*** elementų.



13. ***Turime ir imame:***
    (PG)₆={***bd***, ***be***}

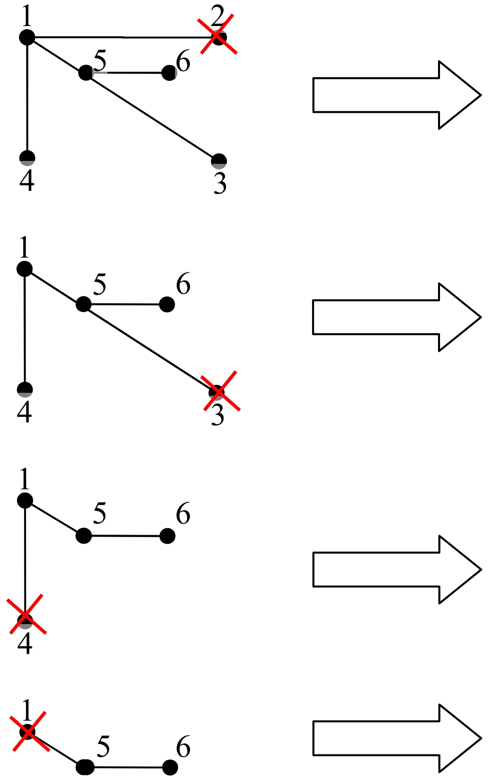
    Gavome:
    $\boldsymbol{e_5} = \boldsymbol{bd}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_5}) = 6$, $\boldsymbol{E'} = (ac, ad, ce, af, \boldsymbol{bd})$, $\boldsymbol{V'} = (a, b, c, d, e, f)$, $\boldsymbol{V''} = (a, b, c, d, e, f)$

14. Kadangi aibėje $\boldsymbol{V''}$ nė karto nenaudotų viršūnių nebeliko, o $\boldsymbol{V'}$tapo lygus V, tai galime žinoti, kad visi bandymai sudaryti medį, naudojant bet kurias likusias briaunas iš briaunų aibių ***(PG)₆*** , ***(PG)₇*** , ***(PG)₁₀*** ar ***(PG)***$_\infty$, baigsis ciklais.

15. Galime daryti išvada, jog mūsų ekonomiško medžio kaina yra:
    $\sum_{i=1}^{5} f(e_i) = f(ac) + f(ad) + f(ce) + f(af) + f(bd) = 1 + 1 + 1 + 3 + 6 = \mathbf{12}$.

<u>**Atsakymas:**</u> Ekon. medis: $G' = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{ac, ad, af, bd, ce\})$, kaina – **12**.

Uždavinys 6. Paskaičiuoti duoto medžio Prüferio kodą.



$\alpha = (1)$

$\alpha = (1, 5)$

$\alpha = (1, 5, 1)$

$\alpha = (1, 5, 1, 5)$

Pastaba. Prüferio kodas yra |V| - 2 = 4 ilgio.

Atsakymas: Gavome Prüferio kodą – $\alpha = (1, 5, 1, 5)$.

Uždavinys 7. Rasti medį pagal duotą Prüferio kodą: *α = (1 , 5 , 1 , 5) .*

Žinome: Viršūnių yra: **|V| = | α |+2**

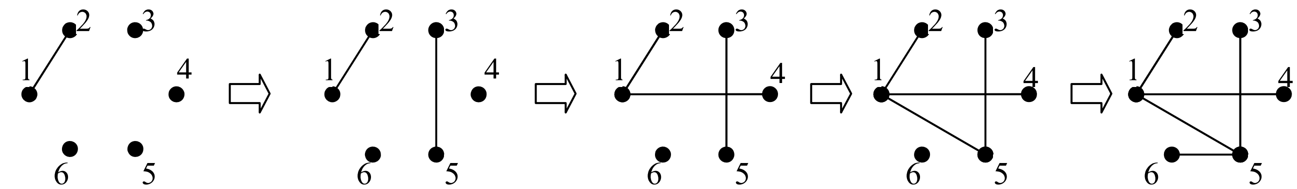
Sprendimas: Jungiame ir šaliname mažiausio numerio medžio viršūnes, kurių nėra Prüferio kode su pirmais Prüferio kodo elementais. Kai Prüferio kode elementų nelieka, sujungiame paskutines dvi likusias viršūnes, iš viršūnių aibės, tarpusavyje. ∀ žingsnyje pildome grafą.

Viršūnių aibė(V) ir Prüferio kodas(α):

V = {1, $\boxed{2}$, 3, 4, 5, 6} ⇨ V = {1, $\boxed{3}$, 4, 5, 6} ⇨ V = {1, $\boxed{4}$, 5, 6} ⇨ V = {$\boxed{1}$, 5, 6} ⇨ V = {$\boxed{5}$, $\boxed{6}$}

α = ($\boxed{1}$, 5, 1, 5) ⇨ α = ($\boxed{5}$, 1, 5) ⇨ α = ($\boxed{1}$, 5) ⇨ α = ($\boxed{5}$) ⇨ α = Ø

Grafas:



Atsakymas: Gavome medį – *G=({1, 2, 3, 4, 5, 6}, {12, 14, 15, 35, 56}) .*